MA2 – „písemná" přednáška 4.5.2020 – 2. část

Křivkový integrál – úvod

Křivkový integrál je „další" zobecnění (nebo, chcete-li, rozšíření) Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)dx$ (z MA1) – je to integrál, jehož obor integrace je křivka (pro nás stačí křivka v rovině nebo v prostoru, ale „myšlenka vytvoření" integrálu stále zůstává „stejná". A možná si jednoduše zobecnění našeho známého integrálu můžeme představit tak, že úsečku, která je obrazem intervalu $\langle a,b\rangle$ na reálné ose „nějak" pokřivíme v rovině, nebo i do prostoru, případně jistě „protáhneme" nebo „stlačíme". Pro integrál v Riemannově smyslu je pak jen důležité, aby „zdeformovaná" úsečka, neboli křivka, měla konečnou délku, a potom už „víme", jak se asi dojde k integrálu po křivce z funkce, která je na uvažované křivce definována.

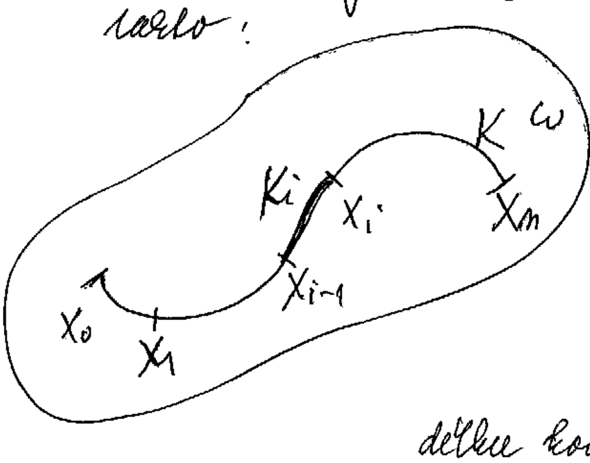
Zkusme začít příkladem užití takového integrálu:

Máme drát délky $\underline{s}$ (to je ta křivka), různě prohnutý, a je dána t.zv. lineární hustota drátu $\rho=\rho(X)$, X je bod drátu" (drát je zanedbatelně „tenký"). Kdyby byl drát „homogenní", tj. $\rho(X)=\text{konst}\ (=\rho)$, pak hmotnost drátu by byla $m=\rho\cdot s$; pokud ale bude drát nehomogenní, pak „myšlenkově" rozdělíme drát na malé kousky, a každý ten kousek budeme považovat za homogenní s hustotou, kterou vybereme z hodnot hustoty $\rho(X)$ v tomto kousku. Pak, vynásobíme-li tuto zvolenou hodnotu hustoty délkou příslušného kousku drátu, dostaneme přibližnou hmotnost tohoto kousku a sečtením těchto přibližných hmotností všech kousků drátu dostaneme přibližně hmotnost drátu. A pro „rozumnou" hustotu ϱ bude zřejmě odhad hmotnosti drátu tím lepší, čím menší budou ty kousky drátu, čím, jak řekneme, bude dělení drátu jemnější. A limitu pro délku kousků jdoucí k nule budeme považovat za hmotnost drátu. A tuto limitu, zcela analogickou k limitě Riemannových integrálních součtů u $(R)\int_a^b f(x)\,dx$, zapisujeme $\int_K \varrho\, ds$, K - označení křivky (zde drátu), ds - značí „limitní délku" kousku K, a nazýváme křivkovým integrálem hustoty ϱ po křivce K.

A „formálně" („v matematičtině"):

Mějme křivku K konečné délky, která leží v oblasti ω, $\omega \subset R^2(R^3)$, a nechť je dána funkce $f: \omega \to R$ (tj. f je definována i na křivce K).

Pak křivkový integrál fce f po křivce K je vytvořen takto:



1) křivku K rozdělíme pomocí dělicích bodů X_i, $i=1,2..n$ na „kousky K_i", $i=1,2..n$ $\bigcup K_i = K$, a K_i mají společné nejvýše „krajní" body X_i; délku kousku K_i označíme $\Delta_i S$ a normou $\nu(D)$ dělení D křivky K bude opět $\nu(D) = \max_i \Delta_i S$

2) v každém kousku K_i křivky zvolíme bod $\tilde{X}_i \in K_i$ a vytvoříme Riemannovy integrální součty, odpovídající dělení a výběru $\{\tilde{X}_i\}_{i=1}^n$:

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{X}_i)\Delta_i s$$

3) existuje-li limita (vlastní)

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tilde{X}_i)\Delta_i s \in R,$$

nezávisle na volbě bodů $\tilde{X}_i \in K_i$, pak tuto limitu nazýváme křivkovým integrálem skalární fce (nebo též často v literatuře křivkovým integrálem prvního druhu) a značíme $\int_K f\,ds$ (nebo též $\int_K f(X)\,ds$).

Pomocí křivkového integrálu se může analogicky modelovat hodnotu takové veličiny, uvažované na křivce, jejíž celková hodnota je vyjádřena součtem hodnot na „částech" křivky – tj. má t.zv. aditivní vlastnost – analogicky k uvedenému příkladu „výpočtu" hmotnosti nehomogenní křivky, můžeme pomocí křivkového integrálu počítat moment setrvačnosti homogenní, ale i nehomogenní křivky, těžiště křivky; celkový náboj drátu, je-li dána hustota; speciálně i délku křivky K – (důležitý integrál pro K!)

$$s = \int_K ds \;.$$

A další geometrická představa významu $\int_K f(x)ds$ pro $f(x) \geqq 0$ na K může být „odvozena" z toho, že $\int_a^b f(x)dx$, kde $f(x) \geqq 0$ v $\langle a,b \rangle$, „počítá" obsah rovinné oblasti ω,

$\omega = \{ [x,y];\ x \in \langle a,b \rangle,\ 0 \leq y \leq f(x) \}$ (viz MA1). Pak ($K \subset R^2$)

je vidět, že $\int_K f(x)dx$ „počítá" obsah „zvlněného proužku papíru", který stojí kolmo na rovinu $z=0$ na křivce K, a v každém bodě $X \in K$ je „široký" $f(X)$ (v Riemannově integrálním součtu $f(\tilde{X}_i)\Delta_i s$ je přibližně plocha části oblasti nad kouskem K_i a pro zjemňování dělení a $\nu(D) \to 0$ limitu integrálních součtů si lze představit jako obsah vyšetřované plochy.

Poznámka – o „Newtonově" přístupu k integrálu $\int_K f ds$:

$\int_K f ds$ je možné také chápat i dle „Newtonova" přístupu k integrálu – jako součet nekonečně mnoha nekonečně malých částeček (elementů) dané veličiny – a tak „získáme" celkovou hodnotu vyšetřované veličiny – např. je-li $f(X)$ hustota křivky (hmotné) K, ds je „kousek" s X, pak $dm = f(X)ds$ je element hmotnosti a

$$m = \int_K f(X)ds \quad \text{je pak hmotnost } K$$

(názorná pro mnohé představa jednodušší)

Další velmi důležité užití křivkového integrálu po křivce prostorové (resp. rovinné) je určení práce vektorového pole po „cestě“, dané křivkou K v tomto poli – důležité fyzikální veličiny pro charakterizaci vektorových polí:

Známe:

(i) je-li „cesta“ K úsečka délky s a pole vektorové konstantní velikosti F a směru souhlasného s cestou, pak práce pole po cestě K je $A = F.s$;
(„základní škola“)

(ii) je-li $\vec{F}$ stále konstantní síla (co do velikosti i směru) a dráha je dána vektorem $\vec{s}$, pak $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$ (skalární součin vektoru síly $\vec{F}$ a vektoru dráhy $\vec{s}$ – říká se, že práci koná složka síly ve směru $\vec{s}$),

tj. $A = \|\vec{F}\| . \|\vec{s}\| . \cos \measuredangle \alpha$, kde $\|\vec{F}\|$ je velikost $\vec{F}$, $\|\vec{s}\|$ značí velikost vektoru $\vec{s}$ a α je úhel, který svírají vektory $\vec{F}$ a $\vec{s}$;
(„střední škola“)

(iii) a obecně – pole $\vec{F}$, definované v oblasti $\omega \subset R^3 (R^2)$ je proměnné, tj. $\vec{F} = \vec{F}(X)$, $X \in \omega$ a dráha (cesta), po které máme určit práci pole $\vec{F}$, je nerovná – tj. křivka $K \subset \omega$.

A pro určení práce pole $\vec{F}$ po cestě K je ještě třeba zadat „směr cesty" – říkáme, že křivku K orientujeme (můžeme třeba dát počáteční bod křivky K a koncový bod K, pokud jsou různé, nebo uvedeme směr „jinak") – pak značíme orientovanou křivku $\vec{K}$.

A výpočet práce pole $\vec{F}$ po $\vec{K}$ převedeme v tomto případě na situaci (ii) pomocí integrování – tj. aplikujeme (ii) (tj. konstantní $\vec{F}$ a „rovná" $\vec{s}$) na kousky „$d\vec{s}$" při rozdělení K – můžeme „Riemannovsky" nebo „Newtonovsky". (vyberte si, co je vám „příjemnější")

Zkusme nyní přístup podle Newtona:

Máme-li dráhu $\vec{K}$, vezmeme element dráhy délky ds, a promítneme vektor pole $\vec{F}$, působící na tomto kousku, do směru dráhy, který je dán tečným vektorem ke křivce v bodě křivky, kde „působí" vektor $\vec{F}$ (tuto představu už máme).

Je-li $\vec{\tau}(X)$ jednotkový tečný vektor ke křivce K v bodě $X \in K$ (předpokládáme, že existuje), pak průmět $\vec{F}(X)$ do „směru dráhy" K je dán skalárním součinem $\vec{F}(X) \cdot \vec{\tau}(X)$

a práce pole $\vec{F}$ po „kousku" křivky ds (kde je „bod X") je pak

$$dA = \vec{F}(X) \cdot \vec{\tau}(X) \, ds,$$

a tedy celková práce pole $\vec{F}$ po cestě K je

$$A = \int_K \vec{F}(X) \cdot \vec{\tau}(X) \, ds .$$

($\vec{\tau}(X)$ udává i „směr cesty")

Integrál $\int_K \vec{F}(X)\cdot\vec{\tau}(X)\,ds$ („stručně" se zapisuje $\int_K \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds$)

se nazývá křivkový integrál vektorové funkce $\vec{F}$ (nebo též často křivkový integrál 2. druhu) a značí se

$$\int_{\vec{K}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_K \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds$$

Zde označení $d\vec{r}$ je označení pro „$\vec{\tau}\,ds$" – neboli označení nekonečně malého „tečného" vektoru ke křivce, do kterého „se v daném bodě křivky „promítá" pole $\vec{F}$, tj. skalární součin $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ je vlastně elementární práce dA.

Pokud bychom si chtěli udělat představu o „Riemannovské cestě" ke křivkovému integrálu vektoru, pak opět – – rozdělíme křivku $\vec{K}$ na orientované části $\vec{K}_i$ (koncový bod $\vec{K}_{i-1}$ je počáteční bod $\vec{K}_i$), zvolíme bod $\tilde{X}_i \in \vec{K}_i$ a pak přibližná hodnota práce pole $\vec{F}$ po části $\vec{K}_i$ je

$$\Delta_i A \cong \vec{F}(\tilde{X}_i)\cdot(X_i - X_{i-1})$$

(X_{i-1}, X_i jsou krajní body K_i)

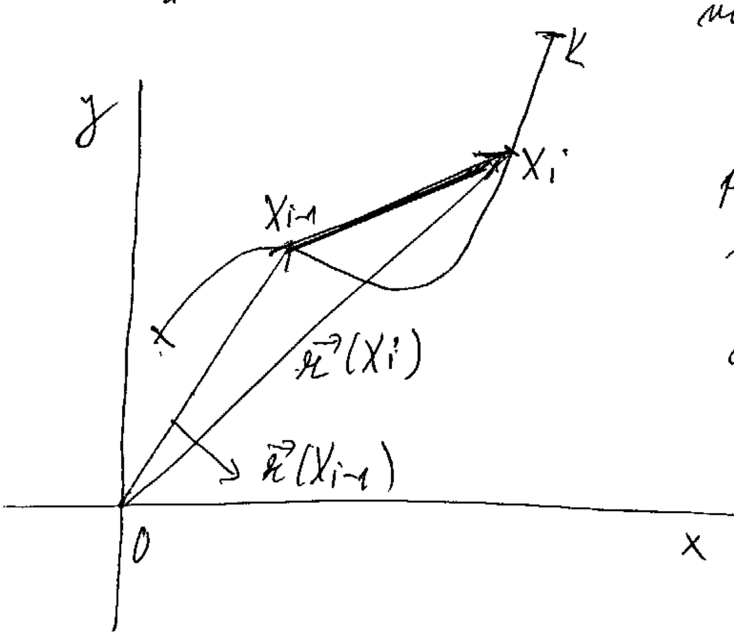
(zde aproximujeme i křivku úsečkou)

a přibližná hodnota práce po křivce K je součtem

$$\sum_i \vec{F}(\tilde{X}_i)\cdot(X_i - X_{i-1}),$$

a $$\int_{\vec{K}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{\nu(D)\to 0} \sum_i \vec{F}(\tilde{X}_i)(X_i - X_{i-1})$$

A pokusím se ukázat, jak se při limitě $r(D)\to 0$ dostaneme k „$d\vec{r}$" („nepřesné", ale pro představu označení")



vektor $X_i - X_{i-1}$ lze vyjádřit

$$X_i - X_{i-1} = \vec{r}(X_i) - \vec{r}(X_{i-1})$$

pomocí vektorů $\vec{r}(X)$ (spojující body X a O (počátek s.s)), a pak vidíme, když zjemňujeme dělení a provádíme limitu integrálních součtů pro $r(D)\to 0$, body X_i dělení se k sobě „přibližují" a v limitě vektor $X_i - X_{i-1}$ přechází v element tečného vektoru ke křivce

$$a \cdot \Delta_i \vec{r} = \vec{r}(X_i) - \vec{r}(X_{i-1}) \to d\vec{r}$$

(pro $r(D)\to 0$) v zápisu integrálu.

Snad tento „úvod" ke křivkovému integrálu pomohl pochopit definice křivkového integrálu skaláru i vektoru.
A dále, jako vždy, bychom měli vyšetřit (na příští přednášce)

i) existenci integrálů křivkových;

(ii) vlastnosti křivkových integrálů (asi analogické k $\int_a^b f$);

(iii) výpočet křivkových integrálů – asi se křivkové integrály budou „počítat" pomocí určitých integrálů $\int_a^b f$, jako to bylo u integrálů vícenásobných).